	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso **2025-2026** **MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	**Modelo**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de **4 ejercicios**: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. **Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas.**
CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.
DURACIÓN: 90 minutos.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

En la Comunidad Autónoma de Aragón se encuentra la única Denominación de Origen Protegida (DOP) de melocotón, el *Melocotón de Calanda*, que celebró su 26º aniversario en 2025. El Departamento de Agricultura de Aragón registró comercialmente para la DOP tres variedades tradicionales de este producto, *Jesca*, *Calante* y *Evaisa*. La DOP exige unas características que deben cumplir sus frutos en cuanto a su aspecto, coloración, calibre, dureza, contenido en azúcar, etc.

1.a) (1 punto) La información recogida durante estos años permite indicar que el peso de los melocotones de la variedad Jesca puede ser aproximado por una distribución normal con desviación típica 50 gramos. Determine el número mínimo de melocotones que sería necesario seleccionar en una muestra aleatoria simple para estimar el peso medio de los melocotones de esta variedad de manera que, con un nivel de confianza del $96,8\,\%$, el margen de error en la estimación no supere los 15 gramos.

1.b) (1,5 puntos) Durante los dos últimos meses de crecimiento, los melocotones de la DOP *Melocotón de Calanda* permanecen embolsados uno a uno en el propio árbol mediante bolsas protectoras que garantizan su pureza y evitan el contacto con productos fitosanitarios. Se calcula que en la última campaña se embolsaron unos 250 millones de melocotones. Pese a ello, las tormentas de verano con granizo pueden dañar un $5\,\%$ de los frutos. En una cooperativa de las empresas certificadas se reciben melocotones para su comercialización como DOP y se inspecciona una muestra aleatoria simple de 400 melocotones. Obtenga el número esperado de melocotones no dañados y calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 375 melocotones no estén dañados.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **2.1** o **2.2**.

Pregunta 2.1

Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.a) (1,5 puntos) Calcule la matriz C tal que $(I + 2C^t)^{-1} = A$, donde I es la matriz identidad de orden dos.

2.1.b) (1 punto) Calcule, si es posible, la matriz D tal que $D^t = \dfrac{B^t\,B}{|B\,B^t|}$.

Nota: para cualquier matriz M, M^t indica su matriz traspuesta.

Pregunta 2.2

El azafrán ecológico es una especia culinaria muy apreciada y costosa. Una empresa lo envasa y comercializa en distintos formatos: sobres de papel reciclado, cajas de plástico y cajas de metal. Cada uno de ellos se envasa en una línea de envasado diferente. Se sabe que el total del azafrán pendiente de envasar a última hora de un día determinado se podría distribuir bien en 15 sobres de papel y 4 cajas de plástico, o bien en 4 cajas de plástico y 3 cajas de metal. Por otra parte, el contenido de un sobre de papel más el de una caja de plástico es 5 gramos inferior que el de una caja de metal. Además, si al total del contenido de 5 cajas de plástico se le añade un gramo más de azafrán, se dobla la capacidad conjunta de los otros dos envases. Indique cuántos gramos de azafrán contiene cada uno de los envases en que puede comercializarse el azafrán.

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **3.1** o **3.2**.

Pregunta 3.1

Dada la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{3-x} & \text{si } x < 1, \\ \\ \dfrac{2-x}{3+x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

3.1.a) (1,3 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en el punto $x = 1$ y determine sus asíntotas.

3.1.b) (1,2 puntos) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $g(x) = (3x^2 + 9x)f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Pregunta 3.2

Dada la función real de variable real $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{a}$ donde $a > 0$ es un parámetro real.

3.2.a) (1,2 puntos) Determine los cortes con los ejes de coordenadas, así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

3.2.b) (1,3 puntos) Determine el valor de a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva, $F(x)$, que verifique $F(0) = 2$ y $F(3) = 7$.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **4.1** o **4.2**.

Pregunta 4.1

De dos sucesos A y B se sabe que $P(B) = 0,5, \ P(A \mid B) = 0,2$ y $P(A \cup B) = 0,8$.

4.1.a) (0,8 puntos) Obtenga la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

4.1.b) (0,7 puntos) Calcule la probabilidad de que ocurra el suceso B pero no el suceso A.

4.1.c) (1 punto) Justifique razonadamente si los sucesos A y B son independientes.

Pregunta 4.2

En una comunidad de vecinos se ha realizado una votación para analizar la conveniencia de instalar placas solares como medida de ahorro energético. El $26\,\%$ de los propietarios votaron en blanco y el resto se repartieron por igual entre los favorables a esta medida y los que votaron en contra. Un $10\,\%$ de los que votaron en blanco son propietarios que tienen la vivienda alquilada. Entre los propietarios favorables a esta medida, un $18\,\%$ también la tienen alquilada y sólo un $5\,\%$ la tienen alquilada entre los propietarios que votaron en contra. Como no hay voluntarios, el presidente de la Comunidad para el próximo año se elegirá por sorteo entre los propietarios de todas las viviendas.

4.2.a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que el futuro presidente de la comunidad de vecinos tenga la vivienda alquilada?

4.2.b) (1,5 puntos) Una vez realizado el sorteo, se comprueba que el nuevo presidente no tiene su vivienda alquilada. ¿Cuál es la probabilidad de que estuviera a favor de la instalación de placas solares en la votación realizada?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

1.a) Sea $X =$ "Peso de un melocotón de Calanda de la variedad Jesca"(en gramos).
Con confianza del $96,6\,\%$ es $\alpha = 1 - 0{,}966 = 0{,}034$, por lo que $\alpha/2 = 0{,}017$ y debemos buscar z tal que $P(Z < z) < 1 - 0{,}017 = 0{,}983$. Consultando la tabla de la distribución normal vemos que $z_{\alpha/2}$ es aproximadamente $2{,}12$.

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 15 \Rightarrow n \geq \Big(\frac{z_{\alpha/2} \quad \sigma}{15}\Big)^2 = \Big(\frac{2,14 \cdot 50}{15}\Big)^2 = 50,884$$

Por tanto, como mínimo habría que seleccionar 51 melocotones en la muestra.

1.b) Definimos $Y =$ número de melocotones no dañados entre los 400, $Y \sim B(n = 400; p = 0,95)$
El número esperado de melocotones no dañados entre los 400 es: $E(Y) = np = 400 \cdot 0,95 = 380$ melocotones.

La probabilidad pedida es $P(Y \geq 375)$. La variable aleatoria Y tiene media igual a 380 y desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{19} \approx 4,36$. Puesto que $n > 30$, $np > 5$ y $nq > 5$, se puede aproximar Y por una distribución normal $N(380; 4,36)$. Utilizando la corrección de Yates y la correspondiente tipificación, se obtiene:

$$P(Y \geq 375) \approx P\Big(Z \geq \frac{374,5 - 380}{4,36}\Big) = P(Z \geq -1{,}26) = 0,8962$$

EJERCICIO 2

Pregunta 2.1

2.1.a) Como $(I + 2C^t)^{-1} = A \Longrightarrow A^{-1} = I + 2C^t \Longrightarrow \frac{1}{2}(A^{-1} - I)^t = C$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{rr|rr} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2+4f_1} \left(\begin{array}{rr|rr} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_1-f_2} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow C = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1.b)

$$B^tB = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad BB^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (3); \qquad \left|B\,B^t\right| = 3$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = D$$

Pregunta 2.2

Se definen $x =$ "gramos de azafrán en un sobre de papel", $y =$ "gramos de azafrán en una caja de plástico" y $z =$ "gramos de azafrán en una caja de metal".
Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 15x + 4y &=& 4y + 3z \\ x + y &=& z - 5 \\ 5y + 1 &=& 2(x+z) \end{array}\right.$$

Resolviendo el sistema se obtiene $x = 3, y = 7, z = 15$. Es decir, los sobres de papel deben contener 3 gramos de azafrán, las cajas de plástico 7 gramos y las de metal 15 gramos.

EJERCICIO 3

Pregunta 3.1

3.1.a) La función será continua en $x = 1$ si y solo si $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2-x}{3+x} = \frac{1}{4} = f(1) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{3-x} = 0.$$

Luego la función no es continua en $x = 1$.

Para $x < 1$, el denominador se anula en $x = 3$, mientras que para $x \geq 1$, el denominador se anula en $x = -3$. Por lo tanto, la función no tiene asíntotas verticales. Además,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{3-x} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2-x}{3+x} = -1$$

Por tanto, la función tiene una única asíntota horizontal en $y = -1$. No hay asíntotas oblicuas al tener una horizontal.

3.1.b) La función

$$g(x) = (3x^2 + 9x)f(x) = 3x(x+3)\left(\frac{2-x}{3+x}\right) = 3x(2-x)$$

corta al eje de abscisas en $x = 0$ y $x = 2$. Luego el área comprendida entre dicha función, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$ es:

$$\text{Área} = \left|\int_1^2 3x(2-x)dx\right| + \left|\int_2^3 3x(2-x)dx\right| = 2 + 4 = 6\, u^2$$

Pregunta 3.2

3.2.a) Como $a \neq 0$, la función $f(x) = (2x^2 - 3x)/a$ es una parábola que corta al eje de abscisas en $x = 0$ y $x = 3/2$. Corta al eje de ordenadas en $y = 0$. La derivada es $f'(x) = (4x-3)/a$ que se anula en el punto $x = 3/4$. Por tanto, como $a > 0$, la función es decreciente en $(-\infty, 3/4)$ y creciente en $(3/4, +\infty)$.

3.2.b) La primitiva es:

$$F(x) = \int \frac{2x^2 - 3x}{a} dx = \frac{1}{a}\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right) + C$$

Ahora, $2 = F(0) = C$ y

$$7 = F(3) = \frac{1}{a}\left(\frac{2\cdot 3^3}{3} - \frac{3\cdot 3^2}{2}\right) + 2 = \frac{9}{2a} + 2 \Longrightarrow a = \frac{9}{10}$$

EJERCICIO 4

Pregunta 4.1

4.1.a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,8 = 0,2$

4.1.b) $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A} \mid B) \cdot P(B) = (1 - P(A \mid B)) \cdot P(B) = (1 - 0{,}2) \cdot 0,5 = 0,40$

4.1.c) Los sucesos A y B son independientes si y sólo si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \mid B) = 0,2 = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{0,5} \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,10$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A) = 0,40$$

Entonces,

$$P(A) \cdot P(B) = 0,40 \cdot 0,50 = 0,20 \neq P(A \cap B) = 0,10$$

Por lo que los sucesos A y B no son independientes.

Pregunta 4.2

Se definen los sucesos $A1 =$ "Votar en blanco", $A2 =$ "Votar a favor de la medida", $A3 =$ "Votar en contra de la medida" y $Q =$ "Tener la vivienda alquilada"

$$P(A1) = 0,26 \;\; ; \; P(A2) = P(A3) = 0,37$$

$$P(Q \mid A1) = 0,10 \;\; ; P(Q \mid A2) = 0,18 \;\; ; P(Q \mid A3) = 0,05$$

4.2.a)

$$P(Q) = P(Q \mid A1)P(A1) + P(Q \mid A2)P(A2) + P(Q \mid A3)P(A3) =$$
$$= 0,10 \cdot 0,26 + 0,18 \cdot 0,37 + 0,05 \cdot 0,37 = 0,1111$$

4.2.b)

$$P(A2 \mid \bar{Q}) = \frac{P(A2 \cap \bar{Q})}{P(\bar{Q})} = \frac{0,82 \cdot 0,37}{0,8889} = 0,3413$$

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
Criterios específicos de corrección y calificación

NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,1 puntos.

Ejercicio 1 (2,5 puntos)

- Apartado (1.a): 1 punto
  - Determinar el valor crítico $z_{\alpha/2}$ .... 0,3 puntos
  - Planteamiento con la aplicación de la fórmula del error .... 0,2 puntos
  - Cálculo correcto del tamaño mínimo de la muestra .... 0,5 puntos
- Apartado (1.b): 1,5 puntos
  - Cálculo del número esperado de melocotones .... 0,2 puntos
  - Aproximación correcta y justificada a la distribución normal .... 0,5 puntos
  - Cálculo correcto de la probabilidad pedida .... 0,8 puntos

Ejercicio 2 (2,5 puntos)
Pregunta 2.1 (2,5 puntos)

- Apartado (2.1.a): 1,5 puntos
  - Obtención de la expresión correcta de C .... 0,4 puntos
  - Cálculo correcto de A^{-1} .... 0,6 puntos
  - Cálculo correcto de C .... 0,5 puntos
- Apartado (2.1.b): 1 punto
  - Cálculo correcto de B^tB .... 0,4 puntos
  - Cálculo correcto de BB^t .... 0,2 puntos
  - Cálculo correcto de D^t .... 0,2 puntos
  - Cálculo correcto de D .... 0,2 puntos

Pregunta 2.2 (2,5 puntos)

- Descripción adecuada de las tres incógnitas .... 0,3 puntos
- Planteamiento correcto del sistema de ecuaciones .... 0,9 puntos
- Resolución correcta del sistema .... 1 punto
- Obtención correcta de la solución contextualizada .... 0,3 puntos

Ejercicio 3 (2,5 puntos)
Pregunta 3.1 (2,5 puntos)

- Apartado (3.1.a): 1,3 puntos
  - Estudio correcto de la discontinuidad en $x = 1$ .... 0,3 puntos
  - Justificación correcta de la no existencia de asíntotas verticales .... 0,3 puntos
  - Determinación correcta de las asíntotas horizontales .... 0,5 puntos
  - Justificación correcta de la no existencia de asíntotas oblicuas .... 0,2 puntos
- Apartado (3.1.b): 1,2 puntos
  - Cálculo correcto de los puntos de corte con el eje OX .... 0,2 puntos
  - Planteamiento correcto del área pedida .... 0,5 puntos
  - Cálculo correcto del área pedida .... 0,5 puntos

Pregunta 3.2 (2,5 puntos)

- Apartado (3.2.a): 1,2 puntos
  - Cálculo correcto de los intervalos de crecimiento y decrecimiento .... 0,8 puntos
  - Cálculo correcto de los puntos de corte con los ejes .... 0,4 puntos
- Apartado (3.2.b): 1,3 puntos
  - Cálculo correcto de la primitiva .... 0,8 puntos
  - Cálculo correcto del parámetro a .... 0,5 puntos

Ejercicio 4 (2,5 puntos)
Pregunta 4.1 (2,5 puntos)

- Apartado (4.1.a): 0,8 puntos
  - Planteamiento correcto de la probabilidad ..... 0,5 puntos
  - Cálculo correcto de la probabilidad ..... 0,3 puntos
- Apartado (4.1.b): 0,7 puntos
  - Planteamiento correcto de la probabilidad ..... 0,5 puntos
  - Cálculo correcto de la probabilidad ..... 0,2 puntos
- Apartado (4.1.c): 1 punto
  - Planteamiento correcto de la independencia de sucesos ..... 0,3 puntos
  - Justificación correcta de la dependencia de los sucesos ..... 0,7 puntos

Pregunta 4.2 (2,5 puntos)

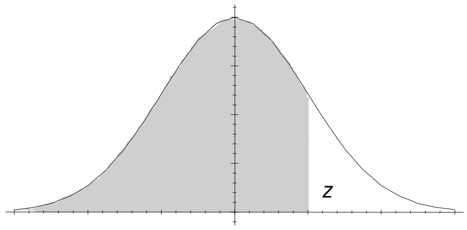
- Apartado (4.2.a): 1 punto
  - Planteamiento correcto de la probabilidad ..... 0,6 puntos
  - Cálculo correcto de la probabilidad ..... 0,4 puntos
- Apartado (4.2.b): 1,5 puntos
  - Planteamiento correcto de la probabilidad ..... 1 punto
  - Cálculo correcto de la probabilidad ..... 0,5 puntos

NOTA final: La no definición de los sucesos se penalizará con 0,3 puntos en la puntuación total de la pregunta

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990