	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso **2025-2026** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	Modelo orientativo

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco** preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación: 2 puntos por pregunta):

Pregunta 1. Un equipo de ingenieros está trabajando en un nuevo modelo de dron para tomar fotografías del estado del tráfico. Elegido un sistema de coordenadas, el dron tiene $A(1,0,2)$ como punto de partida y un cierto tramo de autopista está contenido en el plano $\pi : x+y+2z+1=0$. Las fotografías se deben tomar perpendicularmente al plano π. Se toma el punto $C(0,-3,1)$ de π para calibrar el dron.

a) (1 punto) Determine la distancia del dron en el punto de partida A al plano π y halle una ecuación del plano en el que el dron vuela manteniendo en todo momento la misma distancia al plano π. Este plano recibe el nombre de plano de vuelo.

b) (1 punto) Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:

  b1) El dron se mueve en línea recta en el plano de vuelo desde el punto de partida A al punto más cercano a C. Halle una ecuación de la recta que contiene la trayectoria lineal que recorre el dron para fotografiar C.

  b2) La fotografía obtenida de C a esa distancia no tiene buena definición. Se decide acercar el dron desde el punto de partida A descendiendo perpendicularmente al plano π para situarse en A', a la mitad de la distancia original. Calcule el ángulo formado por el plano π y la recta que pasa por C y A'.

Pregunta 2. Dada $f(x)=\dfrac{x^2+1}{|x|+1}$, se pide:

a) (1 punto) Analizar la paridad y los extremos relativos de $f(x)$.

b) (1 punto) Hallar $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

Pregunta 3. Una envasadora de aceitunas comercializa bolsas con 12 aceitunas. La cosecha de este año ha sido atacada por el hongo *Sphaeropsis dalmatica* y una de cada veinte aceitunas presenta la enfermedad *escudete*. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que una bolsa no tenga aceitunas con la enfermedad.

b) (1 punto) Los controles sanitarios han fallado y se han distribuido 100 bolsas de aceitunas de esta cosecha. Calcular, aproximando por una distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos el 60% de las bolsas distribuidas tenga alguna aceituna con *escudete*.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 4.1. Sean $a \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular, si existen, los valores de a tales que la matriz AA^t sea una matriz diagonal.

b) (1 punto) Calcular, si existen, los valores de a tales que $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.

Pregunta 4.2. Sea el sistema de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z \ = 2 \\ 2x + \lambda y + z = 7 \\ x + 2y + \lambda z = 2 \end{array} \right.$. Se pide:

a) (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro real λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema si $\lambda = -1$.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 5.1. Sea la función:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{1}{2}(-8 + \cos x) & \text{si} & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ a \operatorname{sen}(x) + 4 & \text{si} & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 2 \operatorname{sen}(2x) + b & \text{si} & \pi \leq x \leq 2\pi \end{array} \right. .$$

a) (1 punto) Halle los valores de a y b para que se verifiquen las hipótesis del Teorema de Bolzano en $[0, 2\pi]$.

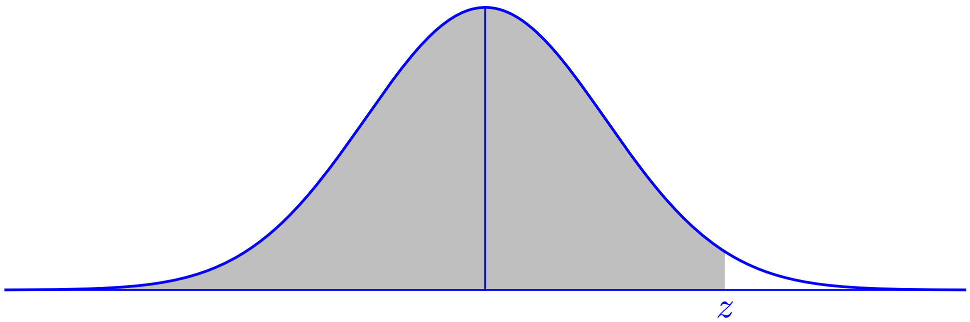
b) (1 punto) Justifique razonadamente que la función $f(x)$ tiene una única raíz en el intervalo $(0, 2\pi)$ y calcule dicha raíz.

Pregunta 5.2. Se considera la función $f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{si} & x \neq 0 \\ 0 & \text{si} & x = 0 \end{array} \right.$. Se pide:

a) (1 punto) Determinar si $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Determinar si $f(x)$ es derivable en el punto $x = 0$ y, si existe, calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x = 0$.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $\mathrm{N}(0, 1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Modelo

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

1.

a) Distancia: 0.5 puntos. Ecuación del plano: 0.5 puntos.
b1) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b2) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

2.

a) Paridad: 0.5 puntos. Extremos relativos: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.3 puntos. Cálculo de la primitiva: 0.5 puntos. Regla de Barrow: 0.2 puntos.

3.

a) Distribución correcta: 0.5 puntos. Cálculo correcto de la probabilidad: 0.5 puntos.
b) Distribución correcta: 0.2 puntos. Planteamiento correcto de la aproximación por una normal: 0.5 puntos. Cálculo correcto de la aproximación: 0.3 puntos. El cálculo sin corrección por continuidad, o una incorrecta, se penalizará con 0.2 puntos. Si la solución de **a)** es incorrecta, pero el planteamiento y resolución de **b)** con el dato erróneo es correcta, se otorga la puntuación máxima en **b)**.

4.1.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Cálculo del valor de a: 0.5 puntos.

4.2.

a) Cálculo de los valores de λ para la discusión: 0.1 puntos. Por cada caso correctamente resuelto: 0.3 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

5.1.

a) Cálculo de a y b para que se verifique el Teorema de Bolzano: 0.5 puntos. Comprobación del resto de hipótesis del Teorema: 0.5 puntos.
b) Respuesta razonada: 0.5 puntos. Cálculo de la raíz de la función: 0.5 puntos.

5.2.

a) Continuidad en $x \neq 0$: 0.3 puntos. Continuidad en $x = 0$: 0.7 puntos.
b) Planteamiento: 0.2 puntos. Cálculo de $f'(0)$: 0.3 puntos. Ecuación de la recta tangente: 0.5 puntos.

MATEMÁTICAS II–SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

1.

a) La distancia del punto A al plano π es

$$\mathrm{d}(A,\pi)=\frac{|1+0+2\cdot 2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\sqrt{6}.$$

El dron vuela en un plano paralelo a π que pasa por A con ecuación $x+y+2z-5=0$.
b1) El punto desde el que se fotografía C es $B(1,-2,3)$, punto de corte de la recta perpendicular al plano π por C, $(x,y,z)=(\mu,-3+\mu,1+2\mu)$, $\mu\in\mathbb{R}$ y el plano de vuelo del apartado anterior. Una ecuación de la recta que contiene la trayectoria lineal del dron es la recta que pasa por A y B: $(x,y,z)=(1,-2\lambda,2+\lambda)$.
b2) La proyección ortogonal de A sobre el plano π es el punto $P(0,-1,0)$. El punto medio de A y P es el punto $A'(1/2,-1/2,1)$. El ángulo que se pide es el formado por los vectores $\overrightarrow{CA'}$ y $\overrightarrow{CP}$.

$$\cos(\alpha)=\frac{|\overrightarrow{CA'}\cdot\overrightarrow{CP}|}{\|\overrightarrow{CA'}\|\,\|\overrightarrow{CP}\|}=\frac{\sqrt{130}}{13}\Leftrightarrow\alpha=\arccos\left(\frac{\sqrt{130}}{13}\right)=28.71^\circ.$$

2.

a) $f(x)$ es una función con simetría par, $f(-x)=f(x)$, derivable si $x>0$ y $x<0$, y su derivada es $f'(x)=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$ y $f'(x)=-\frac{x^2-2x-1}{(1-x)^2}$ en cada uno de los conjuntos anteriores. Además, si $x>0$, $f'(x)=0$ si $x^2+2x-1=0\Rightarrow x=x_1=-1+\sqrt{2}$ o $x=-1-\sqrt{2}$, descartando esta última por ser menor que 0. Por la paridad de la función $f(x)$, $f'(-x_1)=0$ y $x_2=-x_1$ es otro extremo relativo. Estudiando el signo de $f'(x)$, tenemos que $f(x)$ es creciente si $x>x_1$ y si $x_2<x<0$, y decreciente si $0<x<x_1$ y $x<x_2$. Por lo tanto, los puntos $(1-\sqrt{2},2\sqrt{2}-2)$ y $(-1+\sqrt{2},2\sqrt{2}-2)$ son mínimos locales de $f(x)$ y $(0,1)$ es un máximo local de $f(x)$.
b) Por la paridad de la función $f(x)$:

$$\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=\int_0^1\frac{x^2+1}{x+1}\,dx=\int_0^1\left(x-1+\frac{2}{x+1}\right)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+2\ln(x+1)\right]_0^1=2\ln 2-\frac{1}{2}.$$

3.

a) La variable aleatoria $X=$"número de aceitunas de entre las 12 que al azar conforman una bolsa que no tienen la enfermedad" sigue una distribución Binomial$(n=12,p_e=0.95)$. Se pide

$$P(X=12)=p_e^{12}=0.95^{12}\approx 0.5404.$$

b) Sea T la variable aleatoria "número de bolsas con alguna aceituna con *escudete* entre las 100 bolsas empaquetadas sin control sanitario". Esta es una variable con distribución Binomial$(n=100,p)$ con

$$p=P(\text{bolsa con alguna aceituna con escudete})=1-0.95^{12}\approx 0.4596\,.$$

Esta distribución tiene media $n\cdot p=45.96$ y desviación típica $\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}\approx 4.98$ y así podemos aproximar

$$P(T\geq 0.6\cdot 100)=P(T\geq 60)\approx P(Y\geq 59.5),$$

mediante la aproximación de Yates, siendo Y una variable aleatoria normal de media 45.96 y desviación típica 4.98. Tipificando Y y utilizando la tabla de la normal Z de media 0 y desviación típica 1, se obtiene

$$P(T\geq 60)\approx P(Y\geq 59.5)\approx P\big(Z\geq\tfrac{13.54}{4.98}\big)\approx P(Z\geq 2.72)=1-P(Z\leq 2.72)=1-0.9967=0.0033.$$

4.1.

a) La matriz AA^t es $\begin{pmatrix} 4a^2+4 & 2a^2-2 \\ 2a^2-2 & a^2+1 \end{pmatrix}$ y la matriz será diagonal si $2a^2-2=0$, es decir, si $a=1$ o $a=-1$.
b) El producto $(A-B)(A+B) = A^2+AB-BA-B^2$ y será igual a A^2-B^2 solo si $AB=BA$. Como $AB = \begin{pmatrix} 2a+2 & 4a-4 \\ a-1 & 2a+2 \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, solo si $a=1$ se da la igualdad $(A-B)(A+B) = A^2-B^2$.

4.2.

a) La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccrc} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & 1 & 7 \\ 1 & 2 & \lambda & 2 \end{array}\right) \text{ equivalente por filas con } \left(\begin{array}{crrc} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \lambda-4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \end{array}\right).$$

Si $\lambda \notin \{-1,4\}$ el sistema es compatible determinado; si $\lambda=-1$ es compatible indeterminado y es incompatible si $\lambda=4$.
b) Para $\lambda=-1$ el sistema es compatible indeterminado con soluciones $\left\{\left(\frac{16}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right) + t(1,-3,-5) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$.

5.1.

a) Cada una de las funciones que definen f son continuas en $\mathbb{R}$. Si $a=-8$, $f(x)$ es continua en $x=\frac{\pi}{2}$. Si $b=4$, $f(x)$ es continua en $x=\pi$. Entonces si $a=-8$ y $b=4$, $f(x)$ es continua en $[0,2\pi]$, $f(0)=-\frac{7}{2}<0$, $f(2\pi)=4>0$. Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del Teorema de Bolzano.
b) El Teorema de Bolzano garantiza que existe un valor $c \in (0,2\pi)$ tal que $f(c)=0$. Puesto que las funciones coseno y seno toman valores en $[-1,1]$, solo la función $-8\,\mathrm{sen}\,(x)+4$ corta al eje de abscisas. Por lo tanto, la raíz c pertenece al intervalo $(\frac{\pi}{2},\pi)$ y cumple que $\mathrm{sen}\,(c)=\frac{1}{2}$. El único valor de c posible es $\frac{5\pi}{6}$.

5.2.

a) Si $x \neq 0$, $f(x)$ es continua por las propiedades de las funciones continuas. Dado que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} 0 = f(0),$$

la función es continua en $x=0$. Se concluye que la función es continua en todo $\mathbb{R}$.
b) Por la definición $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\ln(h^2+1)}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(h^2+1)}{h^2} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} 1$, luego $f(x)$ es derivable en $x=0$ y, además, $f'(0) = 1$. La ecuación de la recta tangente pedida es $y=x$.

Documento de orientaciones para la PAU 2026

MATEMÁTICAS II–Curso 2025/26

El examen constará de siete problemas distribuidos en cuatro bloques correspondientes a Álgebra, Geometría, Análisis y Probabilidad. El bloque de Análisis tendrá una ponderación del 40% y los otros tres bloques del 20% cada uno.

Habrá tres preguntas obligatorias, una de ellas de Análisis. Como mínimo una de las tres preguntas obligatorias será de carácter competencial. La pregunta competencial puede corresponder a cualquiera de los cuatro bloques mencionados anteriormente.

Habrá dos preguntas de Análisis optativas y se deberá responder a una pregunta de las dos dadas. Si se respondiese a ambas preguntas solo se corregirá la pregunta que aparezca físicamente primero.

Habrá dos preguntas optativas del bloque que todavía no haya aparecido en el examen. Se deberá responder a una pregunta de las dos dadas. Si se respondiese a ambas preguntas solo se corregirá la pregunta que aparezca físicamente primero.

Para garantizar que un 50% de la calificación total del examen corresponda a apartados o ejercicios optativos, en una de las tres preguntas obligatorias se tendrá que escoger un apartado de entre dos posibles, tal y como aparece en el modelo orientativo.

Los problemas estarán diseñados para evaluar las competencias específicas que figuran en el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato, y en el Decreto 64/2022 (BOCM de 26 de Julio) por el que se establecen para la Comunidad de Madrid la ordenación y el currículo del Bachillerato.

Se podrá pedir en los problemas la realización de tareas acerca de los contenidos correspondientes a la materia Matemáticas II, tal y como aparecen en el Decreto 64/2022.

La extensión y nivel de dificultad de los problemas propuestos serán similares a los de cursos anteriores.